ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3η ΔΕΚΑΔΑ

21.

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα (α), ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα (α) και δε διαβάζουν την εφημερίδα (β).

i) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται στην τύχη, να μη διαβάζει την εφημερίδα (α) ή να διαβάζει την εφημερίδα (β).

ii) Ορίζουμε το ενδεχόμενο Β "ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία διαβάζει την εφημερίδα (β)".

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$.

iii) Να αποδείξετε ότι, η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$ δεν έχει ακρότατα.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω τα ενδεχόμενα Α "ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα α"

Β "ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα β"

Τότε, $A - B$ είναι το ενδεχόμενο "Ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα α και δε διαβάζει τη β''.

Δίνεται ότι $P(A) = 50\,\%$, $P(A - B) = 30\%$

Το ενδεχόμενο "ο κάτοικος δε διαβάζει την α ή διαβάζει τη β" είναι το $A' \cup B$.

$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$

$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - [P(A) - P(A \cap B)]$

$= 1 - P(A - B) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{7}{10} = 70\%$

ii)

Είναι προφανές ότι

$B \subseteq B \cup A' \;\Rightarrow\; P(B) \le P(B \cup A') \;\Rightarrow\; P(B) \le \frac{7}{10}$ **(1)**

$P(A - B) = 30\% \;\Leftrightarrow\; P(A) - P(A \cap B) = 30\%$

$50\% - P(A \cap B) = 30\%$

$P(A \cap B) = 20\%$. **(2)**

Όμως $A \cap B \subseteq B \;\Rightarrow\; P(A \cap B) \le P(B) \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\frac{20}{100} \le P(B)$

$$\frac{1}{5} \le P(B) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}.$$

iii)

$f\,'(x) = 3x^2 - x + P(B)$

$\Delta = 1 - 12P(B)$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$

$$12 \cdot \frac{1}{5} \le 12 \cdot P(B) \le 8 \cdot \frac{7}{10}$$

$$-\frac{12}{5} \ge -12P(B) \ge -\frac{84}{10}$$

$$1 - \frac{12}{5} \ge 1 - 12P(B) \ge 1 - \frac{84}{10}$$

$$-\frac{7}{5} \ge \Delta \ge -\frac{74}{10}$$

Άρα το τριώνυμο $f\,'(x) = 3x^2 - x + P(B)$ είναι ομόσημο του $\alpha = 3$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f δεν έχει ακρότατα .

22.

Έστω $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, 5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης
και τα ενδεχόμενα $A = \{x \in \Omega \ /\ 0 \le \ln(x-1) \le \ln 3\}$
$B = \{x \in \Omega \ /\ (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}$

i) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$, $P(B \cup A')$

ii) Αν $P(A) = \dfrac{1}{4}$ να βρείτε την πιθανότητα $P(A' \cup B')$

iii) Αν $P(A) = \dfrac{1}{4}$ και $P(B-A) = \dfrac{1}{8}$, να βρείτε την ποιο μικρή και την ποιο μεγάλη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω , έτσι ώστε $A \cup X = B$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$0 \le \ln(x-1) < \ln 3 \iff \ln 1 \le \ln(x-1) < \ln 3$$
$$1 \le x - 1 < 3$$
$$2 \le x < 4 \quad \text{άρα} \quad A = \{2,\ 3\}$$

$$(x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1) \iff (x^2-5x)(x-1) + 6(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$
$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$
$$\text{Οπότε} \quad B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

ii)

$A - B = \varnothing$ άρα $P(A-B) = 0$

$B \cup A' = \{1,\ 2,\ 3\} \cup \{1,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \Omega$. Άρα $P(B \cup A') = P(\Omega) = 1$

$A' \cup B' = \{1,\ 4,\ 5\} \cup \{4,\ 5\} = \{1,\ 4,\ 5\} = A'$.

Οπότε $P(A' \cup B') = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

iii)

Αφού $A = \{2, 3\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ και πρέπει να ισχύει $A \cup X = B$,

το X δύναται να είναι ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα

$X_1 = \{1\}$ ή $X_2 = \{1,\ 2\}$ ή $X_3 = \{1,\ 3\}$ ή $X_4 = \{1,\ 2,\ 3\}$

Επειδή το X_1 είναι υποσύνολο όλων των άλλων, η ποιο μικρή τιμή της πιθανότητας $P(X)$ είναι η $P(X_1)$.

Όμως $X_1 = B - A$, άρα $P(X_1) = P(B-A) = \dfrac{1}{8}$

Αφού και τα X_1, X_2, X_3 είναι υποσύνολα του X_4 , η ποιο μεγάλη τιμή της πιθανότητας $P(X)$ είναι η $P(X_4)$, για την οποία έχουμε

$$P(X_4) = P(1) + P(2) + P(3) = P(X_1) + P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

23.

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα .

Για τα ενδεχόμενα A , B, Γ του Ω δίνεται ότι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A \cap B = \{1, 3, 4\}$,

$A - B = \{2, 6\}$

και $\Gamma = \{x \in \Omega / \dfrac{x+1}{x-1} \geq 2\}$

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$

ii) Να βρείτε την πιθανότητα ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ.

iii) Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα B, Γ

iv) Αν S^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ , 3λ , 5λ όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \{\lambda \in \Omega / S^2 > 24\}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $A \cap B = \{1, 3, 4\}$ και $A - B = \{2, 6\}$, θα είναι $A = \{1, 3, 4, 2, 6\}$

Αφού $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 4, 2, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$,

θα είναι $B = \{1, 3, 4, 5\}$

Για το ενδεχόμενο Γ έχουμε

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \iff \frac{x+1}{x-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{x+1-2x+2}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{3-x}{x-1} \geq 0$$

$$(3-x)(x-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 1$$

$1 < x \leq 3$ και επειδή $x \in \Omega$, θα είναι $x = 2$ ή $x = 3$

Άρα $\Gamma = \{2, 3\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{10}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10}$$

ii)

$B - \Gamma = \{1, 4, 5\}$ άρα $P(B - \Gamma) = \dfrac{N(B-\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$

iii)

$\Gamma - B = \{2\}$, οπότε $(B - \Gamma) \cup (\Gamma - B) = \{1, 2, 4, 5\}$, άρα $P[(B-\Gamma) \cup (\Gamma - B)] = \dfrac{4}{10}$

iv)

$$\bar{x} = \frac{\lambda + 3\lambda + 5\lambda}{3} = 3\lambda$$

$$S^2 = \frac{(\lambda-3\lambda)^2+(3\lambda-3\lambda)^2+(5\lambda-3\lambda)^2}{3} = \frac{4\lambda^2+4\lambda^2}{3} = \frac{8\lambda^2}{3}$$

$$S^2 > 24 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8\lambda^2}{3} > 24 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 > 9 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < -3 \text{ ή } \lambda > 3$$

Και εφόσον $\lambda \in \Omega$, θα είναι $\Delta = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$$\text{Οπότε} \quad P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{7}{10}$$

24.

Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών .

i) Αν γνωρίζεται ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της πρώτης κλάσης , να βρείτε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες της $3^{ης}$ και της $4^{ης}$ κλάσης.

ii) Από το δείγμα, επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα :

α) Ο μαθητής έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά

β) Ο μαθητής έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 .

Βάρος σε κιλά [,)	Αθρ.Σχετική Συχνότητα
45 – 55	0,2
55 – 65	0,5
65 – 75	……..
75 – 85	……..

Προτεινόμενη λύση

i)

$f_1 = F_1 = 0{,}2$ άρα $f_3 = 0{,}4$

$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

$F_4 = 1$

ii)

$f_2 = F_2 - F_1 = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

α) $f_1 + f_2 = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

β) $f_2 + f_3 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

25.

Ένα κινητό κινείται σ' έναν άξονα και η θέση του κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 5t + 6$, όπου t ο χρόνος σε sec με $t \in [0, 10]$ και το x σε m.

i) Σε ποια θέση του άξονα βρισκότανε το κινητό στην έναρξη της κίνησης;

ii) Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού 4 sec μετά την έναρξη της κίνησης;

iii) Ποια είναι η επιτάχυνση του κινητού;

iv) Ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς την θετική φορά, ποια προς την αρνητική και πότε είναι στιγμιαία ακίνητο;

v) Ποια είναι η μέση ταχύτητα του κινητού κατά το χρονικό διάστημα [2 , 5] ;

vi) Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διήνυσε το κινητό.

Προτεινόμενη λύση

i)

$x(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$ m

ii)

$\upsilon(t) = x'(t) = 2t - 5$, άρα $\upsilon(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$ m/sec

iii)

$\alpha(t) = \upsilon'(t) = 2$ m/ sec^2

iv)

$$\upsilon(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t - 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > \frac{5}{2}$$

Οπότε, το κινητό κινείται προς την θετική φορά, όταν $t \in \left(\frac{5}{2},\ 10\right]$,

κινείται προς την αρνητική φορά, όταν $t \in \left[0,\ \frac{5}{2}\right)$

και είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $t = \frac{5}{2}$

v)

$$\upsilon_\mu = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2} = \frac{6 - 0}{5 - 2} = 3 \text{ m/sec}$$

vi)

$$S_{o\lambda} = \left| x\left(\frac{5}{2}\right) - x(0) \right| + \left| x(10) - x\left(\frac{5}{2}\right) \right| = \left| -\frac{1}{4} - 6 \right| + \left| 56 + \frac{1}{4} \right| = 62{,}5 \text{ m}$$

26.

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης περιέχει 2010 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
Αν A, B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω, έτσι ώστε να ισχύει $9P^2(B)+5=13P(B)+P(A)$, τότε

i) Δείξτε ότι: $[3P(B)-2]^2=0$

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

iii) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων A, B.

iv) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A\cup B)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$9P^2(B)+5=13P(B)+P(A) \quad\Rightarrow\quad 9P^2(B)-12P(B)+4=P(A)+P(B)-1 \quad$ **(1)**

A, B ασυμβίβαστα $\quad\Rightarrow\quad P(A)+P(B)=P(A\cup B)$

Η (1) γίνεται $\quad 9P^2(B)-12P(B)+4=P(A\cup B)-1 \quad$ **(2)**

Όμως $\quad P(A\cup B)\le 1 \quad\Rightarrow\quad P(A\cup B)-1\le 0$

Η (2) γίνεται $\quad 9P^2(B)-12P(B)+4\le 0$

$$[3P(B)-2]^2\le 0,\ \text{οπότε}\ \ [3P(B)-2]^2=0$$

ii)

$[3P(B)-2]^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3P(B)-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad P(B)=\dfrac{2}{3}$

Αντικατάσταση στην υπόθεση δίνει $\;P(A)=\dfrac{1}{3}$

iii)

$P(B)=\dfrac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{N(B)}{2010}=\dfrac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad N(B)=1340$

και ομοίως $N(A)=670$

iv)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$

27.

Έστω A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $\alpha , \beta \in [0,1]$
Αν $P(A\cap B) = \alpha$ και $P(A\cup B)' = \beta$

i) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου "Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A, B"

ii) Να δείξτε ότι $\alpha + \beta \le 1$

iii) Αν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, δείξτε ότι $1 + \alpha \ge \beta + 2\sqrt{\alpha}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} P[(A-B)\cup(B-A)] &= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A\cap B) \\ &= P(A\cup B) - P(A\cap B) \\ &= 1 - P(A\cup B)' - P(A\cap B) \\ &= 1 - \beta - \alpha \end{aligned}$$

ii)

$\alpha + \beta \le 1 \Leftrightarrow P(A\cap B) + P(A\cup B)' \le 1$

$P(A\cap B) + 1 - P(A\cup B) \le 1$

$P(A\cap B) \le P(A\cup B)$, η οποία ισχύει αφού $A\cap B \subseteq A\cup B$

iii)

$1 + \alpha \ge \beta + 2\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 1 + P(A\cap B) \ge P(A\cup B)' + 2\sqrt{P(A\cap B)}$

$1 + P(A\cap B) \ge 1 - P(A\cup B) + 2\sqrt{P(A\cap B)}$

$P(A) + P(B) - P(A\cup B) \ge -P(A\cup B) + 2\sqrt{P(A\cap B)}$

$P(A) + P(B) \ge 2\sqrt{P(A\cap B)}$

$P(A) + P(B) \ge 2\sqrt{P(A)P(B)}$

$[P(A) + P(B)]^2 \ge 4[\sqrt{P(A)P(B)}]^2$

$P^2(A) + P^2(B) + 2P(A)P(B) \ge 4P(A)P(B)$

$P^2(A) + P^2(B) - 2P(A)P(B) \ge 0$

$[P(A) - P(B)]^2 \ge 0$, η οποία είναι προφανής

28.

i) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Σχετική σχ. f_i	$x_i \cdot f_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i$
3−5		0,1			
5−7		0,2			
7−9		0,3			
9−11					
Σύνολο		1			

ii) Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

iii) Να βρείτε τις τιμές που πρέπει να πάρει η σταθερά $c > 0$, έτσι ώστε, αν οι τιμές της μεταβλητής Χ αυξηθούν κατά c, το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

iv) Αν $c \in \Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, όπου Ω δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Α "το δείγμα είναι ομοιογενές και c είναι άρτιος αριθμός"

Προτεινόμενη λύση

i)

Ο πίνακας συμπληρωμένος

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Σχετική σχ. f_i	$x_i \cdot f_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i$
3−5	4	0,1	0,4	16	1,6
5−7	6	0,2	1,2	4	0,8
7−9	8	0,3	2,4	0	0
9−11	10	0,4	4,0	4	1,6
Σύνολο	……….	1	8,0	24	4,0

Επειδή $\bar{x} = \sum x_i f_i = 8$, οι δύο τελευταίες στήλες συμπληρώνονται όπως παραπάνω

ii)

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 f_i = 4 . \quad \text{Άρα} \quad S = 2$$

$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\% > 10\%$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

iii)

Οι νέες τιμές θα είναι $y_i = x_i + c$

$\overline{y} = \overline{x} + c = 8 + c$ και $S_y = S_x = 2$, οπότε $CV_y = \dfrac{S_y}{\overline{y}} = \dfrac{2}{8+c}$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει $\dfrac{2}{8+c} \le 0{,}1 \Leftrightarrow 20 \le 8 + c$

$c \ge 12$

iv)

Το ενδεχόμενο Α είναι $A = \{12, 14, 16, 18, 20\}$, άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

29.

Έστω $\Omega = \{ \omega \in \mathbb{N} / 1 \leq \omega \leq 2012 \}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $P(\omega)$, όπου

P = πιθανότητα για κάθε $\omega \in \Omega$, ως εξής : $P(\omega) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha^2}{1006} & \text{αν } \omega \text{ περιττός} \\ \dfrac{\alpha}{503} & \text{αν } \omega \text{ άρτιος} \end{cases}$

όπου α θετική σταθερά .

i) Να βρείτε τη σταθερά α .

ii) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A = \{ \omega \in \Omega / \omega \text{ περιττός} \}$,
$B = \{ \omega \in \Omega / \omega = \text{πολ}5 \text{ και } \omega \leq 100 \}$
$\Gamma = A - B$

Προτεινόμενη λύση

i)

Προφανώς $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots, 2010, 2011, 2012 \}$

Στο Ω υπάρχουν 2012 αριθμοί . Οι μισοί δηλαδή οι 1006 είναι άρτιοι και οι άλλοι μισοί περιττοί .

Είναι $P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(2011) + P(2012) \Rightarrow$

$$1 = 1006 \cdot \frac{3\alpha^2}{1006} + 1006 \cdot \frac{\alpha}{503}$$

$$3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

$\alpha = \dfrac{1}{3}$ (η $\alpha = -1$ απορρίπτεται αφού είναι αρνητική)

ii)

$A = \{1, 3, 5, \ldots, 2011\}$

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5) + \ldots + P(2011) = 1006 \cdot \frac{3\alpha^2}{1006} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$B = \{5, 10, 15, 20, \ldots, 85, 90, 95, 100\}$

Στο B υπάρχουν 20 πολλαπλάσια του 5 . Από αυτά τα 10 είναι άρτιοι αριθμοί και τα υπόλοιπα περιττοί οπότε $P(B) = 10 \cdot \dfrac{\alpha}{503} + 10 \cdot \dfrac{3\alpha^2}{1006} =$

$$= 10 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{503} + 10 \cdot \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1006} = \frac{10}{1006}$$

$P(\Gamma) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ **(1)**

Το ενδεχόμενο $A \cap B$ περιέχει τα περιττά πολλαπλάσια του 5 από το 1 έως το 100 , που είναι 10 το πλήθος, οπότε

$$P(A \cap B) = 10 \cdot \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1006} = \frac{10}{3 \cdot 1006}$$

$$(1) \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3 \cdot 1006} = \frac{498}{1509}$$

30.

Κάποιος έχει την δυνατότητα να βάλει υποψηφιότητα για πρόεδρος σε δύο συλλόγους $Σ_1$ και $Σ_2$. Έστω τα ενδεχόμενα $Σ_1$ "Εκλέγεται πρόεδρος στον $Σ_1$"
$Σ_2$ "Εκλέγεται πρόεδρος στον $Σ_2$"

Αν η πιθανότητα να εκλεγεί πρόεδρος στον $Σ_1$ είναι $\frac{1}{4}$, να μην εκλεγεί στον $Σ_2$ είναι $\frac{2}{3}$ και να μην εκλεγεί συγχρόνως και σους δύο συλλόγους είναι $\frac{5}{6}$,
να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

i) "Εκλέγεται στον $Σ_1$"
ii) "Εκλέγεται στον $Σ_2$"
iii) "Εκλέγεται και στους δύο συλλόγους"
iv) "Εκλέγεται σ' έναν τουλάχιστον σύλλογο"
v) "Δεν εκλέγεται σε κανέναν"
vi) "Εκλέγεται σε έναν μόνο σύλλογο"
vii) "Το πολύ σε έναν σύλλογο εκλέγεται"

Προτεινόμενη λύση

i)

$$P(Σ_1) = \frac{1}{4}$$

ii)

$$P(Σ_2) = 1 - P(Σ'_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

iii)

$$P(Σ_1 \cap Σ_2) = 1 - P(Σ_1 \cap Σ_2)' = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

iv)

$$P(Σ_1 \cup Σ_2) = P(Σ_1) + P(Σ_2) - P(Σ_1 \cap Σ_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

v)

$$P(Σ_1 \cup Σ_2)' = 1 - P(Σ_1 \cup Σ_2) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

vi)

$$P[(Σ_1 - Σ_2) \cup (Σ_2 - Σ_1)] = P(Σ_1) + P(Σ_2) - 2P(Σ_1 \cap Σ_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

vii)

Το ενδεχόμενο : Το πολύ σε έναν σύλλογο εκλέγεται είναι το $(Σ_1 \cap Σ_2)'$.

Άρα $P(Σ_1 \cap Σ_2)' = \frac{5}{6}$